

# **L'indagine OCSE-PISA: Quadro teorico di riferimento della matematica**

**a cura di Stefania Pozio**



# Definizione di competenza matematica (*mathematical literacy*)

La *Mathematical Literacy* in PISA è stata definita come:

“la capacità di un individuo di individuare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino impegnato, che riflette e che esercita un ruolo costruttivo.”

# Indicazioni nazionali per il curricolo



- ▶ **Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado**

L'alunno ha rafforzato un atteggiamento positivo rispetto alla matematica e, attraverso esperienze in contesti significativi, ha capito come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà



# Componenti principali della valutazione della *mathematical literacy*



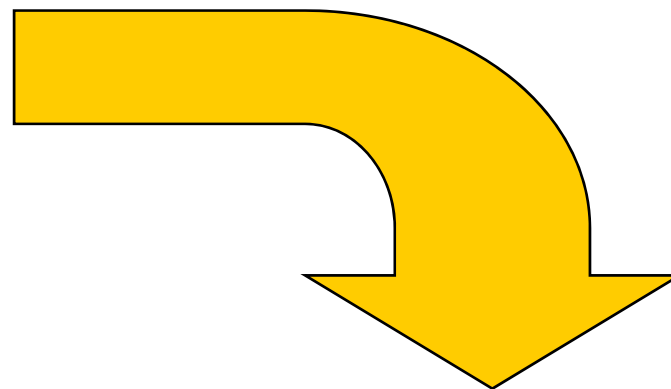
- **Aree di contenuto**
- **Processi di matematizzazione**
- **Situazioni e contesti**
- **Livello di competenza**



# Componenti principali della valutazione della *mathematical literacy*



- **Are** di contenuto
- Processi di matematizzazione
- Situazioni e contesti
- Livello di competenza



## QUANTITA' (ragionamento quantitativo)

- concetto di numero
- uso di numeri per rappresentare quantità e attributi quantificabili degli oggetti del mondo reale (stime e misure)
- comprensione del significato delle operazioni
- idea dell'ordine di grandezza dei numeri
- calcolo mentale/calcoli eleganti



## TASSO DI CAMBIO



Mei-Ling, una studentessa di Singapore, si prepara ad andare in Sudafrica per 3 mesi nell'ambito di un piano di scambi tra studenti. Deve cambiare alcuni dollari di Singapore (SGD) in rand sudafricani (ZAR).

### DOMANDA 1: TASSO DI CAMBIO

Mei-Ling ha saputo che il tasso di cambio tra il dollaro di Singapore e il rand sudafricano è:

$$1 \text{ SGD} = 4,2 \text{ ZAR}$$

Mei-Ling ha cambiato 3.000 dollari di Singapore in rand sudafricani a questo tasso di cambio.

Quanti rand sudafricani ha ricevuto Mei-Ling?

Risposta: .....

Risposte corrette ITALIA: 71%

Risposte corrette OCSE: 80%

Omissioni ITALIA: 12%

Omissioni OCSE: 7%

### DOMANDA 2: TASSO DI CAMBIO

Quando Mei-Ling torna a Singapore dopo 3 mesi, le restano 3.900 ZAR. Li cambia di nuovo in dollari di Singapore, notando che il nuovo tasso di cambio è:

$$1 \text{ SGD} = 4,0 \text{ ZAR}$$

Quanti dollari di Singapore riceve Mei-Ling?

Risposta: .....

Risposte corrette ITALIA: 65%

Risposte corrette OCSE: 74%

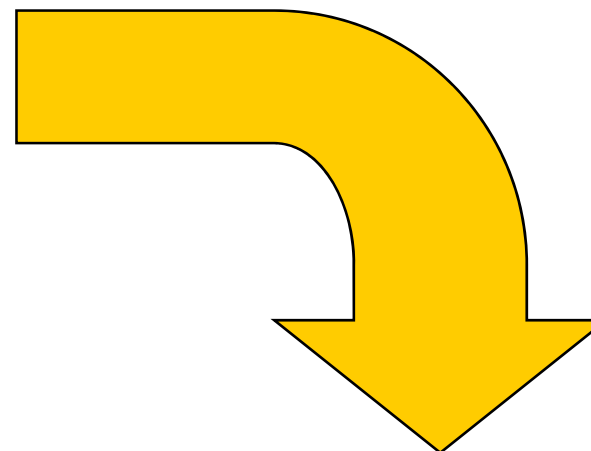
Omissioni ITALIA: 15%

Omissioni OCSE: 9%



# Componenti principali della valutazione della *mathematical literacy*

- **Are** di contenuto
- Processi di matematizzazione
- Situazioni e contesti
- Livello di competenza



## **SPAZIO E FORMA**

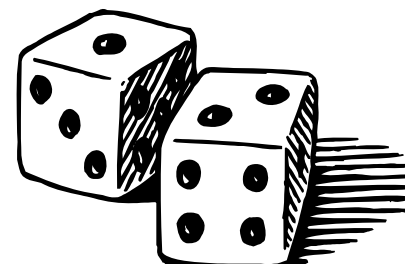
- riconoscimento di forme e modelli
- comprensione dei cambiamenti dinamici delle forme
- rappresentazioni bi- e tri-dimensionali e loro interrelazioni
- capacità di cogliere somiglianze e differenze tra gli oggetti
- posizioni relative e movimento nello spazio

---

## DADI DA GIOCO (LIVELLO 3 – SPAZIO E FORMA)

Il disegno a destra rappresenta due dadi.

I dadi sono cubi con le facce numerate secondo la seguente regola:

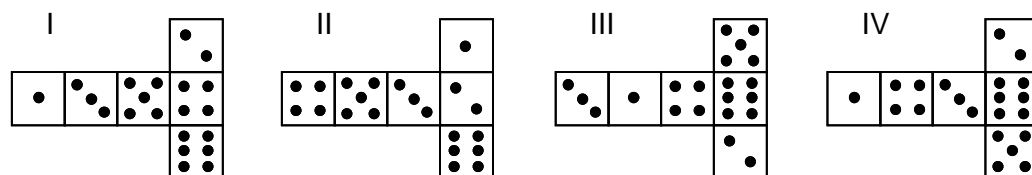


La somma dei punti su due facce opposte deve essere sempre uguale a sette.

Puoi costruire un dado da gioco tagliando, piegando e incollando un pezzo di cartone. Puoi realizzare questo in molti modi. La figura qui sotto mostra quattro cartoncini che puoi utilizzare per costruire un dado.



Quale/i delle seguenti forme puoi ripiegare in modo da formare un dado che obbedisca alla regola per cui la somma delle facce opposte è 7? Per ciascuna



forma, fai un cerchio intorno a «Sì» o «No» nella tabella che segue.

Forma	Obbedisce alla regola per cui la somma delle facce opposte è 7?
I	Sì / No
II	Sì / No
III	Sì / No
IV	Sì / No

Risposte corrette ITALIA: 58%

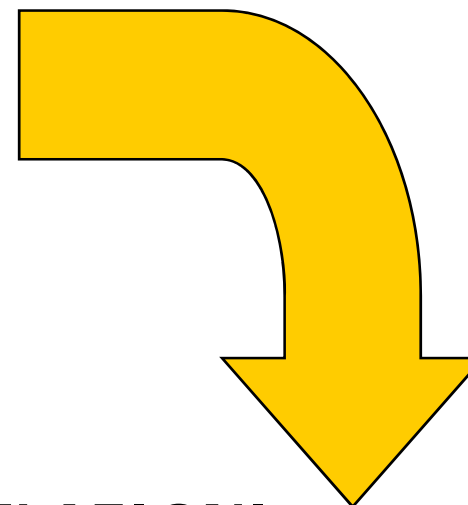
Risposte corrette OCSE: 63%

Omissioni ITALIA: 4%

Omissioni OCSE: 2%

# Componenti principali della valutazione della *mathematical literacy*

- **Are** di contenuto
- Processi di matematizzazione
- Situazioni e contesti
- Livello di competenza



## **CAMBIAMENTO E RELAZIONI**

- rappresentazione di relazioni matematiche in modi diversi (simboliche, algebriche, grafiche, tabulari)
- saper passare da un tipo di rappresentazione ad un altro
- saper pensare in termini funzionali (sapere cosa sono il tasso di cambiamento, la pendenza ecc.)
- si collega ad aspetti di altre idee chiave (Spazio e forma e Incertezza)

# Esempio di una prova di matematica

## ANDATURA



La figura mostra le orme di un uomo che cammina. La lunghezza  $P$  del passo è la distanza tra la parte posteriore di due orme consecutive.

Per gli uomini, la formula  $\frac{n}{P} = 140$  fornisce una relazione approssimativa tra  $n$  e  $P$  dove:

$n$  = numero di passi al minuto, e

$P$  = lunghezza del passo in metri.

STIMOLO

## Domanda 1: ANDATURA

Se la formula si applica all'andatura di Enrico ed Enrico fa 70 passi al minuto, qual è la lunghezza del passo di Enrico? Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

### ANDATURA:INDICAZIONI PER LA CORREZIONE D1

#### ***Punteggio pieno***

Codice 2: 0,5 m or 50 cm, (unità di m

- $70/P = 140$   
 $70 = 140 P$   
 $P = 0,5$
- $70/140$

#### ***Punteggio parziale***

Codice 1: Ad esempio sostituzione corretta dei numeri nella formula ma risultato errato oppure nessuna risposta.

- *[solamente sostituzione dei numeri nella formula]*
- *[sostituzione corretta, ma calcoli sbagliati]*

OPPURE Trasformazione corretta della formula in  $p = n / 140$  ma si ferma lì o prosegue in modo errato.

**% Risposte corrette:**

**Italia 23% (parz.25%)**

**OCSE 36% (parz.22%)**

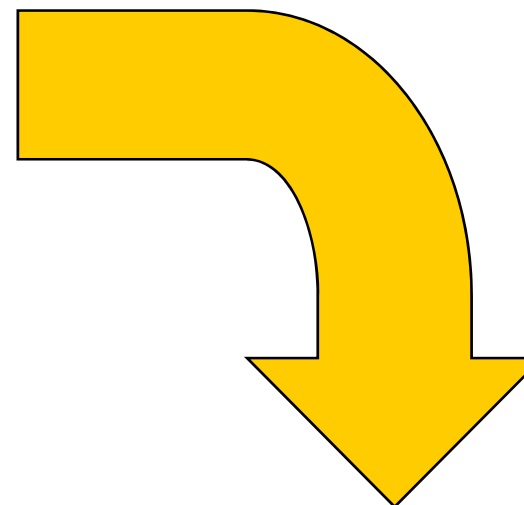
**Omissioni Italia 35%**

**Omissioni OCSE 21%**

# Componenti principali della valutazione della *mathematical literacy*

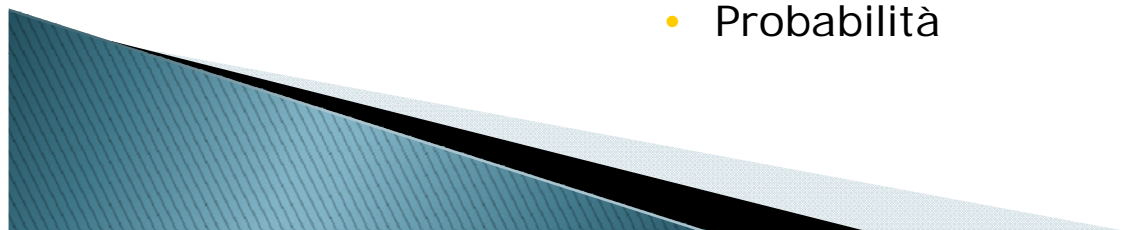


- **Are** di contenuto
- Processi di matematizzazione
- Situazioni e contesti
- Livello di competenza



## **INCERTEZZA**

- Produzione di dati (metodi validi per misurare determinate caratteristiche; indagine statistica)
- Analisi dei dati e loro visualizzazione e rappresentazione grafica; concetto di media e mediana
- Probabilità



## POPOLARITÀ DEL PRESIDENTE

In Zedlandia sono stati effettuati alcuni sondaggi di opinione per determinare il livello di popolarità del Presidente in vista delle prossime elezioni. Quattro editori di giornali hanno svolto sondaggi indipendenti su scala nazionale. I risultati dei quattro sondaggi dei giornali sono i seguenti:

Giornale 1: 36,5% (sondaggio effettuato il 6 gennaio su un campione di 500 cittadini con diritto di voto, scelti a caso),

Giornale 2: 41,0% (sondaggio effettuato il 20 gennaio su un campione di 500 cittadini con diritto di voto, scelti a caso),

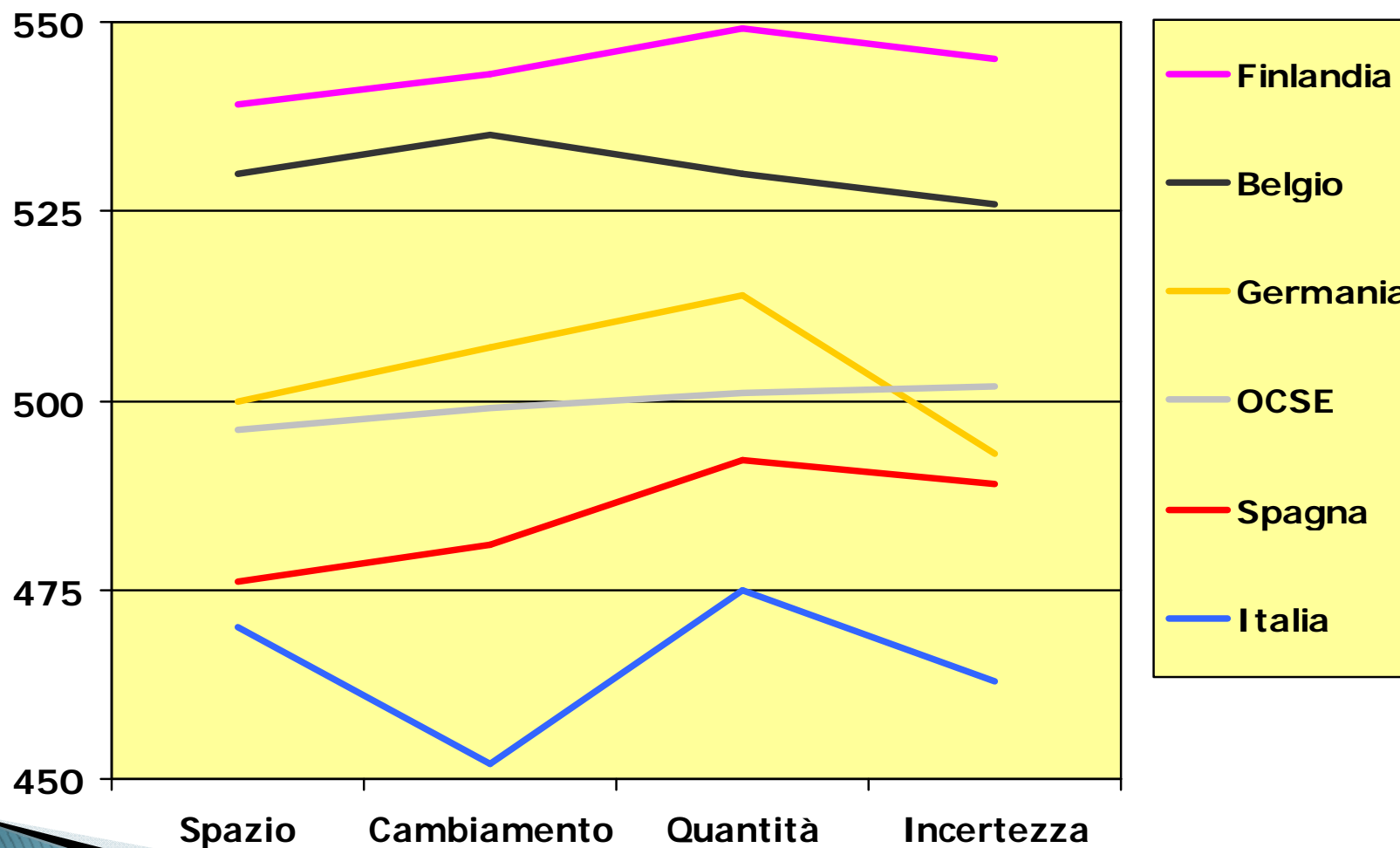
Giornale 3: 39,0% (sondaggio effettuato il 20 gennaio su un campione di 1.000 cittadini con diritto di voto, scelti a caso),

Giornale 4: 44,5% (sondaggio effettuato il 20 gennaio su un campione di 500 cittadini telefonato alla redazione per votare).

Quale giornale è più attendibile per prevedere il livello di popolarità del Presidente se le elezioni si svolgono il 25 gennaio? Scrivi due risposte.

**% Risposte corrette:**  
**Italia 37% (parz.6%)**  
**OCSE 36% (parz.7%)**  
**Omissioni Italia 31%**  
**Omissioni OCSE 22%**

# Confronto sottoscale di Matematica con alcuni paesi di riferimento (dati 2003)



# Componenti principali della valutazione della *mathematical literacy*



- Aree di contenuto
- **Processi di matematizzazione**
- Situazioni e contesti
- Livello di competenza





**Problema:** *Il consiglio comunale ha deciso di mettere un lampione in un piccolo parco triangolare in modo che l'intero parco sia illuminato. Dove dovrebbe essere messo il lampione?*



## Il processo di matematizzazione

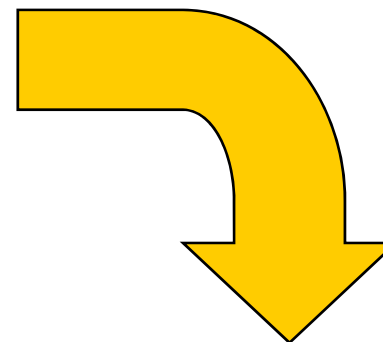
1. Partire da un problema reale.
2. Strutturare il problema in base a concetti matematici (parco = triangolo, illuminazione = cerchio, lampione = centro)
3. Isolare progressivamente il problema ritagliandolo dalla realtà attraverso processi quali il fare supposizioni sulle caratteristiche essenziali del problema, il generalizzare e il formalizzare (cioè trasformare il problema reale in un problema matematico: trovare il centro del cerchio)
4. Risolvere il problema matematico
5. Tradurre la soluzione matematica in termini di situazione reale.



# Componenti principali della valutazione della *mathematical literacy*



- Aree di contenuto
- **Processi di matematizzazione**
- Situazioni e contesti
- Livello di competenza



## 8 competenze tipiche (Niss *et al.*, 1999)

- Pensiero e ragionamento
- Argomentazione
- Comunicazione
- Modellizzazione
- Formulazione e risoluzione di problemi
- Rappresentazione
- Uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico delle operazioni
- Uso di strumenti e sussidi



# Indicazioni nazionali per il curricolo

- ▶ Ha consolidato le conoscenze teoriche acquisite e sa argomentare (ad esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione), grazie ad attività laboratoriali, alla discussione tra pari e alla manipolazione di modelli costruiti con i compagni.
- ▶ Rispetta punti di vista diversi dal proprio; è capace di sostenere le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e argomentando attraverso concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta.
- ▶ Valuta le informazioni che ha su una situazione, riconosce la loro coerenza interna e la coerenza tra esse e le conoscenze che ha del contesto, sviluppando senso critico.

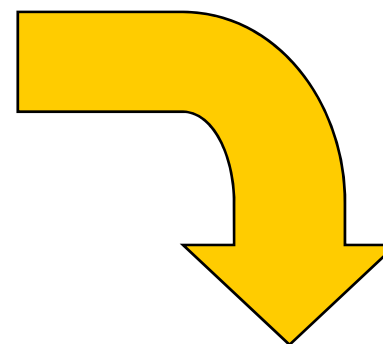
# Indicazioni nazionali per il curricolo

- ▶ Riconosce e risolve problemi di vario genere analizzando la situazione e traducendola in termini matematici, spiegando anche in forma scritta il procedimento seguito, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.
- ▶ Confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.

# Componenti principali della valutazione della *mathematical literacy*



- Aree di contenuto
- **Processi di matematizzazione**
- Situazioni e contesti
- Livello di competenza



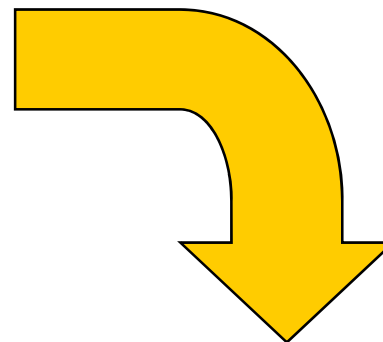
## **RIPRODUZIONE** (quesiti abbastanza familiari)

- riprodurre procedure di routine seguendo precise indicazioni;
- rispondere a domande che riguardano un contesto a lui familiare, nelle quali sono fornite tutte le informazioni pertinenti;
- applicare algoritmi standard;
- risolvere problemi familiari;
- eseguire calcoli elementari;
- manipolare espressioni che contengono simboli o formule presentati in forma standard e familiare.



# Componenti principali della valutazione della *mathematical literacy*

- Aree di contenuto
- **Processi di matematizzazione**
- Situazioni e contesti
- Livello di competenza



**CONNESSIONI** (problemi che non sono di routine, ma che si riferiscono comunque sempre ad ambiti familiari o semi-familiari)

- saper fare collegamenti tra diverse rappresentazioni di una determinata situazione;
- applicare semplici strategie per la risoluzione di problemi;
- elaborare brevi comunicazioni per esporre le proprie interpretazioni, i propri risultati, i propri ragionamenti;
- saper mettere in connessione elementi che fanno parte dei diversi filoni curriculari (algebra, geometria, statistica ecc.);
- saper risolvere problemi utilizzando non solo procedure standard, ma anche processi originali di problem solving che uniscono diversi metodi di rappresentazione e comunicazione (schemi, tabelle, grafici, parole o figure).

## Domanda 2: ANDATURA

Bernardo sa che la lunghezza del suo passo è di 0,80 metri. La formula viene applicata all'andatura di Bernardo.

Calcola la velocità a cui cammina Bernardo esprimendola in metri al minuto e in chilometri all'ora. Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.



ANDATURA: INDICAZIONI PER LA CORREZIONE D2

*Punteggio pieno* (LIVELLO 6)

Codice 31: Risposta corretta (unità di misura non richiesta) sia per metri/minuto sia per km/ora:

$$n = 140 \times 0,80 = 112$$

Bernardo cammina  $112 \times 0,80$  metri = 89,6 metri al minuto.

La sua velocità è di 89,6 metri al minuto.

Allora la sua velocità è di 5,38 o 5,4 km/ora.

*Punteggio parziale* (LIVELLO 5) Risposta corretta (unità di misura richiesta) o per metri/minuto o per km/ora.

*Punteggio parziale* (LIVELLO 4): calcola la velocità in metri al minuto.

**Risposte corrette ITALIA: 11%**  
(media tra i tre livelli)

**Risposte corrette OCSE: 21%**  
(media tra i tre livelli)

**Omissioni ITALIA: 62%**

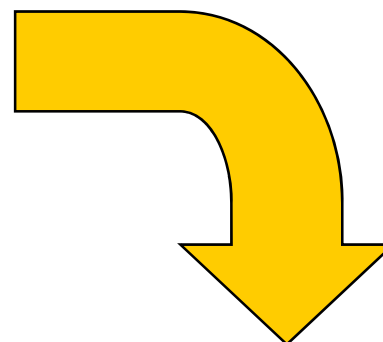
**Omissioni OCSE: 39%**



# Componenti principali della valutazione della *mathematical literacy*



- Aree di contenuto
- **Processi di matematizzazione**
- Situazioni e contesti
- Livello di competenza



## RIFLESSIONE

- selezionare, comparare e valutare strategie appropriate per risolvere problemi;
- saper sviluppare strategie, utilizzando abilità logiche e di ragionamento ben sviluppate;
- applicare tali strategie affrontando ambiti problematici più complessi e meno familiari rispetto ai livelli precedenti;
- saper collegare rappresentazioni matematiche formali a situazioni del mondo reale;
- esporre e comunicare con precisione le proprie azioni e riflessioni, collegando i risultati raggiunti;
- saper argomentare e giustificare i risultati ottenuti.







### Domanda 3: TASSO DI CAMBIO

Durante questi 3 mesi il tasso di cambio è passato da 4,2 a 4,0 ZAR per 1 SGD.

Per Mei-Ling è più vantaggioso che il tasso di cambio sia 4,0 ZAR invece di 4,2 ZAR nel momento in cui cambia i suoi rand sudafricani in dollari di Singapore? Spiega brevemente la tua risposta.

#### TASSO DI CAMBIO: INDICAZIONI PER LA CORREZIONE D3

##### *Punteggio pieno*

Codice 11: Sì, seguito da una spiegazione appropriata.

- Sì, grazie al tasso di cambio più basso (per 1 SGD) Mei-Ling riceverà più dollari di Singapore per i suoi rand sudafricani.
- Sì, 4,2 ZAR per un dollaro le avrebbero fatto ottenere 929 ZAR. (Da notare: lo studente ha scritto ZAR invece di SGD, ma ha eseguito correttamente i calcoli e il confronto per cui questo errore può essere ignorato.)
- Sì, perché lei ha ricevuto 4.2 ZAR per 1 SGD ed ora deve pagare solo 4.0 ZAR per ricevere 1 SGD.
- Sì, perché ogni SGD costa 0.2 ZAR di meno.
- Sì, perché quando si divide per 4.2 il risultato è maggiore.
- Sì, è più vantaggioso per lei perché se non si fosse

**Risposte corrette ITALIA: 34%**

**Risposte corrette OCSE: 40%**

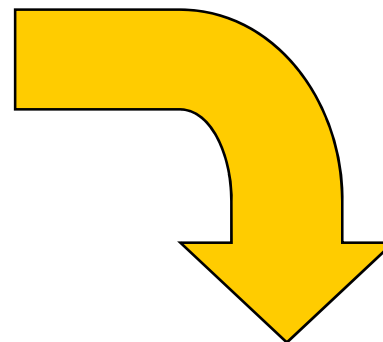
**Omissioni ITALIA: 29%**

**Omissioni OCSE: 18%**



# Componenti principali della valutazione della *mathematical literacy*

- Aree di contenuto
- Processi di matematizzazione
- **Situazioni e contesti**
- Livello di competenza

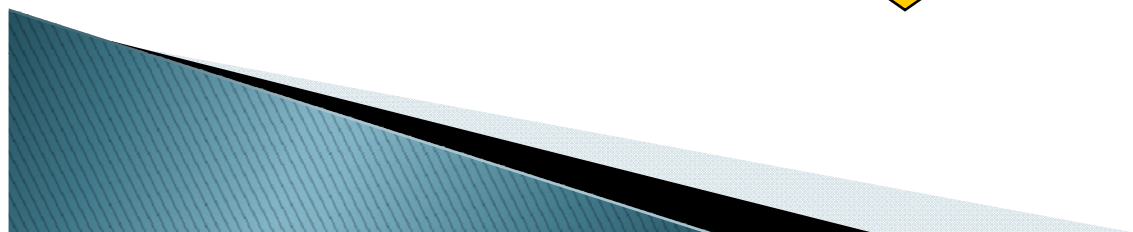
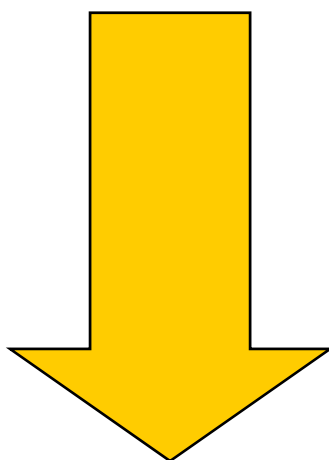


- **Personali:** quelli più immediatamente legati alla vita e all'esperienza dello studente.
- **Educative o occupazionali:** vita scolastica dello studente o contesti lavorativi noti allo studente.
- **Pubbliche:** riferiti all'ambiente che lo circonda e che riguarda la comunità di appartenenza.
- **Scientifiche:** contesti più astratti intra-matematici.

# Componenti principali della valutazione della *mathematical literacy*



- Aree di contenuto
- Processi di matematizzazione
- Situazioni e contesti
- **Livello di competenza**



# I 6 livelli di competenza

Livello 1	Livello 3	Livello 6
<b>Lo studente è in grado di</b>		
rispondere a domande che riguardino contesti loro familiari, nelle quali siano fornite tutte le informazioni pertinenti e sia chiaramente definito il quesito;	eseguire procedure descritte chiaramente, comprese quelle che richiedono decisioni in sequenza;	concettualizzare, generalizzare e utilizzare informazioni basate su una propria analisi e modellizzazione di situazioni problematiche complesse;
individuare informazioni e mettere in atto procedimenti di routine all'interno di situazioni esplicitamente definite e seguendo precise indicazioni;	interpretare e utilizzare rappresentazioni basate su informazioni provenienti da fonti differenti e ragionare direttamente a partire da esse;	collegare fra loro diverse fonti d'informazione e rappresentazioni passando dall'una all'altra in maniera flessibile;
compiere azioni ovvie che procedano direttamente dallo stimolo fornito.	elaborare brevi comunicazioni per esporre le proprie interpretazioni, i propri risultati e i propri ragionamenti.	esporre e comunicare con precisione le proprie azioni e riflessioni collegando i risultati raggiunti e le interpretazioni alla situazione nuova che si trovano ad affrontare.

# Fattori sottesi ai livelli di difficoltà

- ▶ **Il tipo e il grado di interpretazione e di riflessione richiesti:**
  - natura della richiesta di interpretazione che deriva dal contesto del problema;
  - la misura in cui sono forniti esplicitamente i procedimenti richiesti per risolvere il problema;
  - la misura in cui sono richiesti intuizione, ragionamenti complessi e generalizzazioni.

# Fattori sottesi ai livelli di difficoltà



- ▶ **Il tipo di abilità di rappresentazione richiesta:**
  - problemi con un solo metodo di rappresentazione;
  - problemi con diverse modalità di rappresentazione;
  - problemi in cui è necessario trovare la rappresentazione appropriata.



# Fattori sottesi ai livelli di difficoltà

- ▶ **Il tipo e il livello di abilità matematica richiesta:**
  - problemi con un unico passaggio e riproduzione di elementi matematici di base e esecuzione di semplici calcoli;
  - problemi con diversi passaggi che richiedono conoscenze matematiche di livello superiore.

# Fattori sottesi ai livelli di difficoltà

- ▶ **Il tipo e il grado di argomentazione matematica richiesta:**
  - problemi senza richiesta di argomentazione;
  - problemi in cui si devono applicare argomentazioni note;
  - problemi in cui si devono creare argomentazioni matematiche o comprendere quelle di altre persone o giudicare la correttezza di determinati argomenti.



# Le prove di matematica



- ▶ Le prove sono costituite da:
  - uno stimolo (testo, diagramma o grafico, immagini);
  - una o più domande.
- ▶ Le domande possono essere:
  - chiuse a scelta multipla semplice o complessa (1/3) ;
  - aperte a risposta univoca o a risposta breve (1/3);
  - aperte a risposta articolata (1/3).
- ▶ Sono distribuite fra le quattro idee chiave e le quattro situazioni.
- ▶ La proporzione per i tre raggruppamenti di competenze è 1:2:1.



# PISA 2003- L'autoefficacia e il rendimento in matematica



## Definizione di autoefficacia:

*“Convinzione nelle proprie capacità di organizzare e realizzare il corso di azioni necessario a gestire adeguatamente le situazioni che si incontreranno in modo da raggiungere i risultati prefissati” (Bandura, 1986).*

- L'autoefficacia gioca un ruolo importante nel determinare il comportamento, cioè il sentirsi sicuri rispetto a uno specifico problema è cruciale per la capacità dell'individuo di risolvere quel problema.
- L'Italia ottiene un punteggio all'indice di  $-0,11$ , al di sotto della media internazionale.



# PISA 2003-Risposte alle domande di autoefficacia



Utilizzare un orario ferroviario per calcolare quanto tempo ci vuole per andare da un posto all'altro	20%
Calcolare una percentuale di sconto	17%
Calcolare quanti metri quadrati di piastrelle sono necessari per ricoprire un pavimento	30%
Capire i grafici pubblicati sui giornali	22%
Risolvere un'equazione del tipo $3x + 5 = 17$	15%
Calcolare la distanza reale tra due luoghi indicati su una cartina in scala 1: 10.000	52%
Risolvere un'equazione del tipo $2(x + 3) = (x + 3)(x - 3)$	20%
Calcolare il consumo medio di carburante di un'automobile	50%



# PISA 2003 – Autoefficacia e risultati in matematica degli studenti italiani



Autoefficacia in matematica e prestazioni in matematica

