

## ***Indicazioni nazionali e Linee guida di Matematica per la Scuola secondaria di II grado: alcune proposte didattiche con l'uso del software***

**Luigi Tomasi**

Centro Ricerche Didattiche "Ugo Morin" - [luigi.tomasi@unife.it](mailto:luigi.tomasi@unife.it)

### ***1. Introduzione***

Agli insegnanti, nella loro formazione, è sempre più richiesta la competenza nell'uso, per la didattica, delle tecnologie e dei software che possono essere di aiuto per l'insegnamento e per l'apprendimento. Questo aspetto della professionalità docente è previsto da tutti i piani di studio dei corsi universitari in cui si formano gli insegnanti, ma non sempre se ne trovano le ricadute nella pratica didattica. È da sottolineare che per la matematica, in particolare, l'uso delle tecnologie informatiche nella didattica, per la sua valenza formativa e metodologica, costituisce oggi un ambito molto importante e significativo. L'insegnante di matematica dovrà quindi padroneggiare dal punto di vista didattico l'uso delle tecnologie e dei software che possono essere di valido aiuto per impostare un insegnamento di tipo laboratoriale. Su questi strumenti occorre una approfondita riflessione e progettazione didattica, per esplorarne le potenzialità in classe.

In questo contributo si propone di utilizzare il software *GeoGebra*, per svolgere alcune attività di matematica per la scuola secondaria di II grado, in stretto riferimento a quanto è contenuto nelle *Indicazioni nazionali* e nelle *Linee guida* di matematica del 2010 per la Scuola secondaria di II grado. *GeoGebra* è un software di matematica dinamica per la didattica, che comprende geometria (del piano e 3D), algebra, analisi, statistica, probabilità e altro. Date le sue caratteristiche *GeoGebra* può essere integrato nell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria di II grado, in tutte le classi. In questo contributo si propone di utilizzarlo per lo studio di alcuni

temi fondamentali del curriculum di matematica, come le costruzioni geometriche, i modelli matematici, lo studio delle variazioni di una funzione e la geometria dello spazio.

## **2. Le Indicazioni Nazionali e Linee Guida per la Matematica e l'uso delle tecnologie; introduzione alla geometria**

Riguardo all'uso delle tecnologie, nelle *Indicazioni nazionali per i Licei* (2010) si legge questo passo:

*“Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. L'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico. Il percorso, quando ciò si rivelerà opportuno, favorirà l'uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati nelle altre discipline scientifiche.*

*L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale.”*

Seguendo tali indicazioni, per quanto riguarda la geometria è opportuno sottolineare un punto particolarmente importante, laddove si elencano i “*concetti e metodi matematici oggetto di studio*”. Tra i temi che sono obiettivo di studio, sono indicati:

*“gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni)”.*

L'uso del software di geometria permette di presentare inizialmente attività di esplorazione di figure piane, rivalutando il ruolo delle costruzioni e delle congetture per arrivare in modo più graduale -e didatticamente corretto- alla dimostrazione. Un primo ambito di utilizzazione del software *GeoGebra* è quindi quello della esplorazione di figure, con un percorso dalle congetture alla dimostrazione (si veda ad esempio le attività proposte nel Piano m@t.abel, nel sito dell'INDIRE: [www.indire.it](http://www.indire.it)). Un esempio di problema da proporre in questa attività di laboratorio è il seguente:

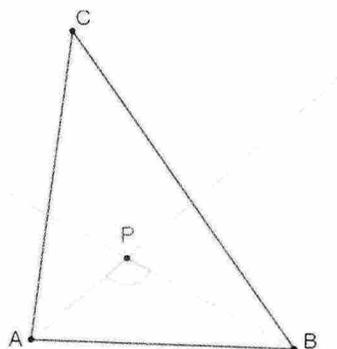
*Dato un triangolo  $ABC$ , traccia le bisettrici degli angoli in  $A$  e in  $B$ . È possibile, spostando opportunamente i vertici (con un software di geometria), fare in modo che queste bisettrici siano perpendicolari?*

Il problema è scritto in forma aperta e va proposto agli studenti in laboratorio, con l'uso di un software di geometria dinamica, in modo da favorire attività di esplorazione e di formulazione di congetture. Per ritrovare altri problemi, formulati in questo modo, si consiglia di consultare il sito della rubrica di problemi di geometria online *Flatlandia* (<http://web.unife.it/progetti/fardicono/flatlandia/>).

Quasi tutti gli argomenti di geometria si prestano ad essere svolti con l'uso del software, in particolare i seguenti:

- Punti notevoli di un triangolo
- Circonferenza; poligoni inscritti; poligoni circoscritti
- Isometrie del piano
- Equivalenza nel piano e misura di superfici
- Similitudine nel piano
- Circonferenza e cerchio.

Il software di geometria permette di presentare questi temi in contesti motivanti, in grado di suscitare l'interesse degli allievi. Ad esempio, nello studio delle trasformazioni geometriche del piano si può presentare il problema di Erone, lo studio dei poligoni che tassellano il piano, un'attività sul biliardo (per queste attività si veda il Piano [m@t.abel](mailto:m@t.abel), nel sito dell'INDIRE). L'uso del software di geometria permette di affrontare lo studio di questi problemi con costruzioni dinamiche e la scoperta di proprietà invarianti e di congetture ricavate dalle costruzioni. Con un'adeguata progettazione didattica il software può quindi giocare un ruolo importante per rinnovare l'insegnamento della geometria.



### **3. Modelli matematici: proposte didattiche con l'uso del software**

L'ambito delle geometrie non è l'unico dove l'uso di un software e delle tecnologie può aiutare l'insegnamento e l'apprendimento. Un tema dominante delle *Indicazioni Nazionali/Linee Guida* è quello dei modelli matematici. Il modello matematico di un fenomeno del mondo reale richiede un processo di matematizzazione che ha per obiettivo la descrizione in modo sintetico e oggettivo di questo fenomeno. Un fenomeno può essere esaminato in modo da fare previsioni sulla sua evoluzione nel tempo. Si tratta di un tema fondamentale nello studio della matematica e delle sue applicazioni. Si vuole stabilire un legame tra matematica e mondo reale. Partendo da alcuni problemi, con l'obiettivo della loro formalizzazione, si introducono concetti e strumenti matematici in modo più motivante per gli studenti. Lo strumento fondamentale della modellizzazione matematica è costituito dalle *funzioni* in una o più variabili; nella scuola secondaria ci si occupa di quelle in una sola variabile (che potrà essere *discreta* oppure *continua*). Infatti quando le osservazioni mostrano che una quantità varia in dipendenza di altre, può sorgere la domanda se esiste una *relazione* che esprima questo legame. Una grandezza  $y$  (per esempio la temperatura, la posizione di un corpo in moto, il valore di un titolo,...) varia al variare di una grandezza  $x$  (per esempio il tempo). Comprendere e descrivere i modelli fondamentali di variazione di una grandezza costituisce quindi, secondo le *Indicazioni nazionali*, una competenza matematica indispensabile per tutti gli studenti. I modelli fondamentali sono: il modello lineare, il modello quadratico, il modello potenza, il modello esponenziale, il modello sinusoidale e pochi altri.

Come si può descrivere la variazione di un fenomeno? La variazione di un fenomeno può essere descritta in modo *discreto*: la grandezza  $x$  assume i valori  $x_0$ ,  $x_0+\Delta x$ ,  $x_0+2\Delta x$ ,  $x_0+3\Delta x$ , ... e per ciascun valore di  $x$  osserviamo e registriamo (ad es. in una tabella) il corrispondente valore di  $y$ . Riportiamo questi punti in un grafico ed esaminiamo il modello che meglio si adatta a questi punti. Il concetto matematico che serve per descrivere questa variazione è quello di successione. Le nozioni teoriche necessarie inizialmente sono semplici e si riducono all'analisi della successione delle differenze prime o della successione delle differenze seconde (o di ordine più elevato). Si può proporre di esaminare alcuni fenomeni che possono essere descritti con funzioni lineari. Gli strumenti informatici permettono oggi di affrontare facilmente lo studio dei modelli matematici. Nello studio dei modelli matematici si può usare il software *GeoGebra* che ha anche una ambiente di lavoro "Foglio di calcolo". Si tratta di una vista che è integrata con gli altri ambienti del software, ad esempio con le viste Algebra e Grafici.

I modelli matematici sono anche presenti nel *Quadro di riferimento INVALSI* per la valutazione delle conoscenze e competenze matematiche della Scuola secondaria di II grado, nel quale si pone attenzione, tra gli altri da rilevare, sul seguente processo cognitivo:

*"Utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, ...)". (INVALSI, Quadro di Riferimento - Secondo ciclo di istruzione - Prova di Matematica, 2012)*

Queste stesse competenze sono previste anche dalle indagini internazionali sugli apprendimenti matematici, come ad esempio la prova OCSE-PISA, che per quanto riguarda la rilevazione svolta nel 2012 per matematica, fornisce la seguente definizione:

*"Per competenza matematica si intende la capacità di un individuo di utilizzare e interpretare la matematica e di darne rappresentazione mediante formule, in una varietà di contesti. Tale competenza comprende*

*la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo”.*

(Framework di Matematica, OCSE PISA, 2012)

Il software *GeoGebra* può essere utilizzato in modo molto efficace dal punto di vista didattico per lo studio di famiglie di funzioni –tramite l’uso di *slider* (parametri)- partendo da esempi del mondo reale (tariffe telefoniche, semplici problemi di scelta). Si riporta un esempio di quesito di questo tipo dalla prova INVALSI, 2014, Classe 2<sup>a</sup> Superiore, domanda 22 (fascicolo 1):

Un parcheggio propone ai clienti tre tariffe:

- tariffa A: 15 euro per tutta la giornata (24 ore)
- tariffa B: 1 euro all’ora
- tariffa C: la prima ora gratis e 1,20 euro per ogni ora successiva.

a. Mario deve lasciare al parcheggio l’auto per 8 ore. Quale tariffa gli conviene scegliere?

Risposta: la tariffa .....

b. Qual è il numero  $h$  di ore di parcheggio per cui le tariffe B e C si equivalgono? Scrivi i calcoli che hai fatto per trovare la risposta e poi riporta il risultato.

Altre modellizzazioni ricavate da situazioni reali sono quelle delle tariffe dell’acqua oppure delle aliquote IRPEF, in cui si usano delle funzioni “a gradini” per modellizzare la situazione. Analogamente, con l’uso di *GeoGebra* si possono presentare in classe problemi riguardanti il modello quadratico in contesti significativi (ad esempio, proponendo lo studio dell’area di rettangoli isoperimetrici; dello spazio di frenata di un’auto; sulla forma dello zampillo di una fontana, o altri esempi presi dalla Fisica o dall’Economia). Riportiamo qui di seguito il problema dello spazio di frenata di un’auto, da esaminare con l’uso del software al variare di un parametro (con *GeoGebra* si può usare uno slider).

Secondo la rivista americana "Car and Driver" (aprile 1991) un'auto che procede a 70 miles/h (circa 112,7 km/h) impiega circa 54 metri per frenare e fermarsi [con la strada in condizioni normali].

Il Ministero dei Trasporti ha fornito un modello semplificato secondo cui, assunto pari ad un secondo il tempo di reazione del conducente, lo spazio totale di arresto (in metri) di un autoveicolo è proporzionale al

quadrato della velocità  $v$  (in km/h), secondo la formula:  $s(v) = \frac{v^2}{250f}$ ,

dove il coefficiente di aderenza  $f$  dipende dalle condizioni del fondo stradale, è riportato nella tabella [...]

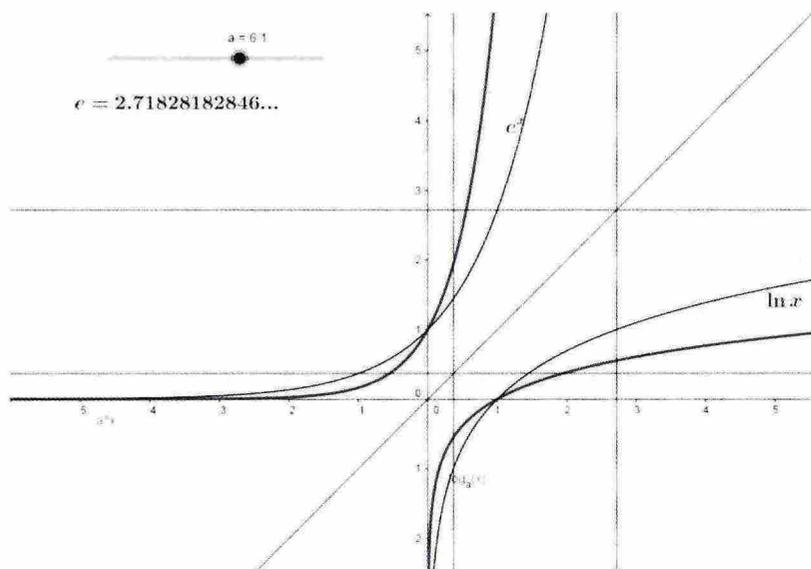
(problema tratto da P. Brandi e A. Salvadori, *Modelli matematici elementari*, B. Mondadori, Milano 2004, p.160)

Il software *GeoGebra* permette anche di proporre in classe alcuni modelli discreti di crescita (o decrescita) di una popolazione, usando la possibilità di iterare una funzione. In questo modo si possono studiare alcuni sistemi dinamici discreti elementari, la crescita aritmetica (modello lineare discreto), la crescita geometrica (modello esponenziale discreto), come cresce un capitale depositato in banca e il modello di crescita logistica. Per esaminare i diversi tipi di crescita si può consultare l'attività "Ognuno cresce a modo suo" (Piano m@t.abel sul sito [INDIRE](#)). Dopo queste attività si passa dall'esponenziale discreto (successioni geometriche) alla curva esponenziale e allo studio della famiglia di curve  $y = a^x$  (creando uno slider per  $a$ , positivo) e delle relative funzioni inverse  $y = \log_a x$ .

L'introduzione della curva esponenziale e dei logaritmi permette poi di affrontare lo studio di diversi problemi ricavati dal mondo reale, e in particolare dalla fisica, ad esempio lo studio di come varia la pressione atmosferica rispetto all'altezza (in km) dal livello del mare, oppure del decadimento radioattivo o di altri fenomeni di crescita o decrescita esponenziale.

Il software *GeoGebra* si presta anche a proporre alcune simulazioni sul moto circolare uniforme e sul moto armonico, per introdurre in modo graduale il modello sinusoidale e lo studio delle relative

curve del tipo  $f(x) = a \sin(\omega x - \varphi) + k$ . Nell'analisi di questo modello si rivela fondamentale l'uso di slider (rispettivamente su  $a$ , su  $\omega$ , su  $\varphi$  e su  $k$ ), uno strumento molto efficace di *GeoGebra* per lo studio di famiglie di curve al variare di un parametro.



#### 4. Funzioni, velocità di variazione, introduzione alla derivata

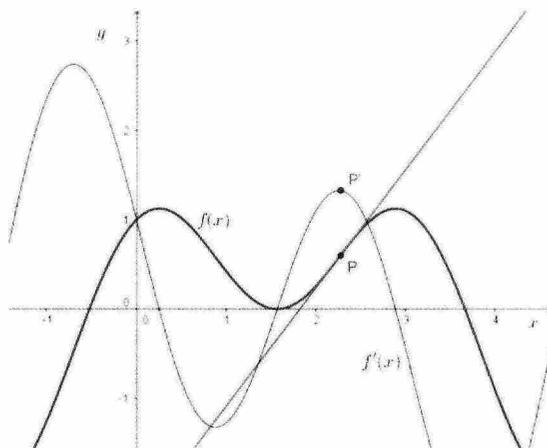
La variazione di una funzione è un tema fondamentale presente nelle *Indicazioni nazionali* per i licei. Come si descrive la variazione di una grandezza nel tempo? Che cos'è la velocità di variazione? In un articolo comparso su *“La Repubblica”*: *“Trasporto aereo, rallenta il calo dei passeggeri. A giugno flessione del 7,1%. In ripresa i viaggi tra gli Usa e l'Europa”*. Ci si può chiedere in classe cosa significa *“rallenta il calo dei passeggeri”*. Sullo studio delle variazioni di una funzione riportiamo le *Indicazioni nazionali per i Licei - Secondo Biennio - Relazioni e funzioni*:

*“lo studente apprenderà ad analizzare sia graficamente che analiticamente le principali funzioni e saprà operare su funzioni composte e inverse. Un tema importante di studio sarà il concetto di velocità di variazione di un processo rappresentato mediante una funzione.”*

Questo passo è particolarmente significativo. Il concetto di “velocità di variazione di un processo” fa riferimento al rapporto incrementale e allo studio degli incrementi di una funzione corrispondenti a incrementi “a passo costante” della variabile indipendente, come introduzione al concetto di derivata di una funzione. Le *Indicazioni nazionali* propongono qui un’innovazione dal punto di vista didattico. Con *GeoGebra* si possono costruire facilmente dei fogli di lavoro dove si affronta lo studio della pendenza media di una funzione in corrispondenza a incrementi costanti della  $x$ .

Ma a volte non basta conoscere la variazione media di una funzione in un intervallo. *GeoGebra* permette di passare dalla velocità media di variazione alla variazione istantanea (o “puntuale”) di una funzione in modo dinamico e di introdurre in modo visuale il concetto di derivata. Si

possono presentare i seguenti dei fogli di lavoro sul rapporto incrementale che permette di passare dinamicamente dalla retta secante alla retta tangente in un punto. Con questi fogli di lavoro si può illustrare il passaggio dal concetto di



derivata in un punto al concetto di derivata come funzione, e scoprire -in modo dinamico e interattivo- i legami tra il grafico di una funzione e il grafico della sua derivata prima.

### **5. Geometria sintetica e analitica dello spazio: proposte didattiche con l'uso del software**

Le *Indicazioni nazionali* per i Licei prevedono che, oltre alla geometria sintetica dello spazio, siano introdotti alcuni elementi della geometria analitica dello spazio al quinto anno. Riportiamo quando è scritto nelle *Indicazioni nazionali* per i Licei scientifici, Secondo biennio, per la Geometria:

*“Lo studio della geometria proseguirà con l'estensione allo spazio di alcuni dei temi della geometria piana, anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica. In particolare, saranno studiate le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità, nonché le proprietà dei principali solidi geometrici (in particolare dei poliedri e dei solidi di rotazione).”*

Al quinto anno dei licei (non solo nel liceo scientifico), per quanto riguarda la Geometria, è previsto quanto segue:

*“L'introduzione delle coordinate cartesiane nello spazio permetterà allo studente di studiare dal punto di vista analitico rette, piani e sfere.”*

Riportiamo quanto è stato scritto in una proposta di percorso didattico di geometria elaborato da un gruppo di lavoro nominato dalla CIIM per il Secondo Biennio e per il Quinto anno (2013, sito UMI-CIIM: [www.umi-ciim.it](http://www.umi-ciim.it)), dove si consiglia di non partire da un'impostazione assiomatica della geometria dello spazio, ma di mettere in evidenza l'importanza di alcuni teoremi, senza far imparare troppe dimostrazioni; non ci sarebbe il tempo e si perderebbe il significato di quelle poche proposizioni che sono importanti. Nel percorso citato si ricorda inoltre che argomentare e congetturare dovrebbero precedere il dimostrare. Si consiglia inoltre di far vedere come la geometria sia connessa agli altri ambiti (Aritmetica e algebra, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni) e di sottolineare sempre i collegamenti tra di essi. Si sottolinea infine che la geometria, in particolare la geometria dello spazio, è un ambito di studio molto importante per scoprire, sperimentare, visualizzare, argomentare proprietà e collegamenti tra una teoria matematica e il mondo reale; pertanto la geometria non va trascurata.

Nelle *Linee Guida* per il I biennio (2010) per gli Istituti Tecnici e per gli Istituti Professionali, per quanto riguarda la geometria, sono previste le seguenti conoscenze e abilità:

*Conoscenze: Nozioni fondamentali di geometria del piano e dello spazio. Le principali figure del piano e dello spazio.*

*Abilità: Porre, analizzare e risolvere problemi del piano e dello spazio utilizzando le proprietà delle figure geometriche oppure le proprietà di opportune isometrie.*

Nonostante la differenza che si riscontra tra le *Indicazioni nazionali* per i Licei e le *Linee guida* per gli Istituti Tecnici e per gli Istituti Professionali, in tutti gli indirizzi di studio di scuola secondaria di II grado si propone lo studio o almeno un avvio alla geometria dello spazio.

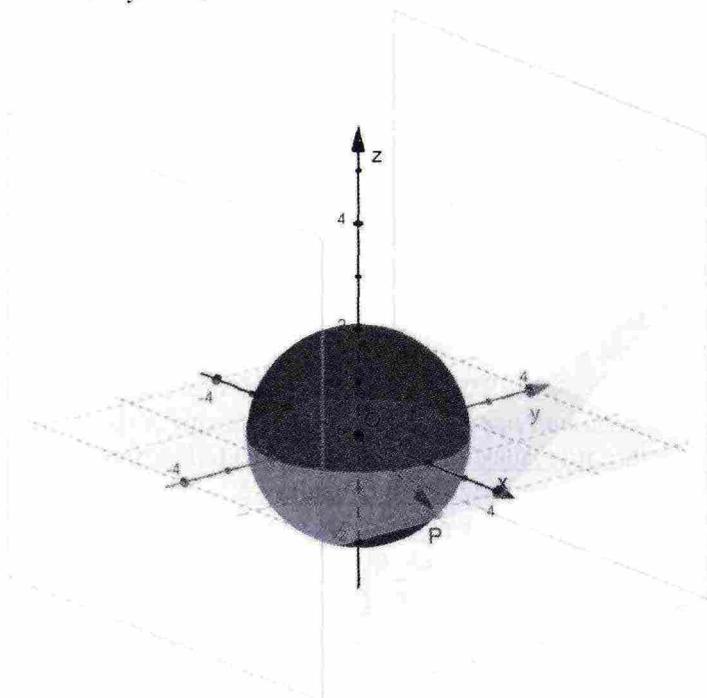
Si può proporre questo argomento fondamentale della geometria inizialmente in modo intuitivo e costruttivo, con l'uso di materiale concreto e di un software di geometria. Negli indirizzi di studio che hanno un orario più adeguato si potrà proporre un maggiore approfondimento e la dimostrazione di alcune proprietà fondamentali.

L'ultima versione del software GeoGebra (versione 5) possiede un ambiente dedicato ai Grafici 3D, che permette di proporre facilmente delle attività di geometria dello spazio in modo interattivo, mediante la visualizzazione dinamica, sia per la geometria sintetica che per la geometria analitica, su tutti gli argomenti previsti dalle Indicazioni nazionali e dalle Linee guida.

Nelle classi si riscontra spesso la difficoltà di visualizzazione spaziale da parte degli allievi. Questo è dovuto prima di tutto al fatto che si trascura -di solito per mancanza di tempo- la geometria sintetica dello spazio. Un software come *GeoGebra* può aiutare molto la visualizzazione (assieme alla costruzione di modelli materiali di alcuni solidi geometrici e delle loro sezioni). La possibilità di cambiare in modo dinamico il punto di vista su una figura 3D costituisce un grande aiuto per la visualizzazione e il ragionamento geometrico

nello spazio. Un'osservazione didattica ovvia: non si può fare geometria analitica dello spazio senza conoscere le nozioni fondamentali di geometria sintetica dello spazio.

Per la geometria analitica dello spazio riportiamo qui di seguito la figura ottenuta con l'uso di *GeoGebra*. In questa figura è rappresentato il piano tangente a una sfera di centro l'origine  $O$  degli assi e raggio 2 nel suo punto  $P$  di coordinate  $(1, 1, -\sqrt{2})$ . Si ottiene il piano di equazione  $x + y - z\sqrt{2} = 4$ .



### **Conclusioni**

Negli esempi presentati è stato proposto un approccio dinamico e interattivo ad alcuni temi di matematica per la Scuola secondaria di II grado con l'uso del software *GeoGebra*, seguendo quanto è suggerito dalle *Indicazioni nazionali* e dalle *Linee guida*. Le potenzialità

e la versatilità del software rendono possibile un approccio laboratoriale all'insegnamento e all'apprendimento della matematica. Le caratteristiche implementate nel software consentono di proporre attività di scoperta di proprietà, di visualizzazione dinamica e di produzione di congetture per quasi tutti i temi di matematica. Queste caratteristiche delle nuove tecnologie possono permettere un insegnamento e apprendimento della matematica fondati maggiormente sugli aspetti intuitivi e costruttivi dei concetti.

### ***Bibliografia e sitografia***

AA.VV., *Esplorazioni matematiche con GeoGebra*, a cura di Ornella Roberti, Ledizioni, Milano 2013.

P. Brandi e A. Salvadori (2004.). *Modelli matematici elementari*, Bruno Mondadori, Milano

*Flatlandia*, sito di problemi di geometria online:

<http://web.unife.it/progetti/fardicono/flatlandia/>

INVALSI, *Quadro di Riferimento - Secondo ciclo di istruzione - Prova di matematica*, 2012

[https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR\\_Mat\\_II\\_ciclo.pdf](https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_Mat_II_ciclo.pdf)

*Indicazioni nazionali per i Licei* (2010): vedi il sito

[www.indire.it/lucabas/lkmw\\_file/licei2010/indicazioni\\_nuovo\\_impaginato/\\_decreto\\_indicazioni\\_nazionali.pdf](http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf)

*Linee Guida per gli Istituti Tecnici* (2010, 2012): vedi il sito

[www.indire.it/lucabas/lkmw\\_file/nuovi\\_tecnici/INDIC/\\_LINEE\\_GUIDA\\_TECNICI\\_.pdf](http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_tecnici/INDIC/_LINEE_GUIDA_TECNICI_.pdf)

*Linee Guida per gli Istituti Professionali* (2010, 2012): vedi il sito

[www.indire.it/lucabas/lkmw\\_file/nuovi\\_professionali/linee\\_guida](http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/nuovi_professionali/linee_guida)

OECD (2013). PISA 2012, *Quadro di Riferimento analitico per la Matematica, la Lettura, le Scienze, il Problem Solving e la Financial Literacy*. Traduzione italiana di questo documento nel sito INVALSI:

[www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2012.php?page=pisa2012\\_it\\_06](http://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2012.php?page=pisa2012_it_06)

*Piano m@t.abel* di formazione dei docenti di matematica. Vedi il sito

dell'INDIRE: <http://www.scuolavalore.indire.it/superguida/matabel/>

Software *GeoGebra*, vedi il sito ufficiale: [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)